جامعة الفرات   كلية العلوم الثالثة   قسم الرياضيات   السنة الرابعة

سلم تصحيح مقرر ميكانيك تحليلي   الاسم:

الدورة الفصلية الأولى للعام الدراسي 2023-2024   العلامة: 100 درجة

السؤال الأول (20 درجة): عرف كل مما يلي:

المجموعة الديناميكية:

هو مفهوم يطلق على الجسيمات المتحركة في الفراغ تحت تأثير قوى خارجية أو داخلية.

5

الأنظمة غير الهولونية:

إذا كان معادلة القيد غير قابلة للتكامل فنسمي المجموعة بالمجموعة الديناميكية غير الهولونومية.

5

السرعات المعممة:

السرعات المعممة هي المعدلات الزمنية للإحداثيات المعممة وعددها يساوي عدد الإحداثيات المعممة تساوي عدد درجات الحرية اى أن:

$$\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3, \ldots\ldots\ldots\ldots, \dot{q}_n$$

$$\text{or} \quad \dot{q}_\alpha = \frac{d\, q_\alpha}{d\, t}, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, n$$

5

المجموعات المحافظة:

إذا كانت جميع القوى المؤثرة على مجموعة جسيمات يمكن اشتقاقها من دالة جهد (أو طاقة جهد) فإن المجموعة تسمى مجموعة محافظة وهذا يعبر عنه رياضيا كالتالي:

5

$$\bar{F} = -\bar{\nabla} V = -\operatorname{grad} V \qquad (1)$$

السؤال الثاني (20 درجة):

تتحرك خرزة كتلتها m على سلك على شكل قطع مكافئ معادلته: $(y = 16x^2\ ,\ z=0)$

المطلوب: احسب القوى المعممة المؤثرة على الخرزة مع رسم الشكل؟

من تعريف القوى المعممة: $Q_v = \sum F_\alpha \dfrac{\partial r_\alpha}{\partial q_v}$ وكذلك نلاحظ أن :

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} = x\vec{i} + 16x^2\vec{j}$$ 5

أي لا يوجد إلا إحداثي معمم واحد لذلك توجد قوى معممة واحدة هي

$$Q_x = \vec{F}.\frac{\partial \vec{r}}{\partial x} = (-mg\vec{j}).(\vec{i} + 32x\vec{j}) = -32mgx$$ 10

حل آخر : من الشغل الافتراضي

$$\delta W = \vec{F}.\delta\vec{r}$$ 5

$$= (-mg\vec{j}).(\delta x\vec{i} + 32x\delta x\vec{j}) = 32mgx\delta x$$ 5

$$Q_x = \frac{\delta W}{\delta x} = -32mgx, \qquad Q_y = Q_z = 0$$ 10

السؤال الثالث (20 درجة): استنتج معادلة لاغرانج انطلاقاً من القانون الثاني لنيوتن:

$$m_v \ddot{\vec{r}}_v = \vec{F}_v$$

$$m_v \ddot{\vec{r}}_v = \vec{F}_v$$

بضرب طرفي المعادلة قياسياً في $\dfrac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_\alpha}$ نحصل على :

$$m_v \ddot{\vec{r}}_v.\frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_\alpha} = \vec{F}_v.\frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_\alpha} \qquad (11)$$ 2

ولاحظ أن $Q_\alpha = \sum_{v=1}^{N} \vec{F}_v.\dfrac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_\alpha}$

$$\because \frac{d}{dt}\left(\dot{\vec{r}}_v.\frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_\alpha}\right) = \ddot{\vec{r}}_v\frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_\alpha} + \dot{\vec{r}}_v\frac{d}{d}\left(\frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_\alpha}\right)$$ 2

$$= \ddot{\vec{r}}_v\frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_\alpha} + \dot{\vec{r}}_v.\frac{\partial \dot{\vec{r}}_v}{\partial q_\alpha}$$

$$\therefore \ddot{\vec{r}}_v.\frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_\alpha} = \frac{d}{dt}\left(\dot{\vec{r}}_v.\frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_\alpha}\right) - \dot{\vec{r}}_v.\frac{\partial \dot{\vec{r}}_v}{\partial q_\alpha} \qquad (12)$$ 2

بالتعويض من (12) في (11) بعد الضرب في m_v واستخدام المعادلة (10) يكون

$$\vec{F}_v.\frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_\alpha} = \frac{d}{dt}\left(m_v\dot{\vec{r}}_v.\frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_\alpha}\right) - m_v\dot{\vec{r}}_v.\frac{\partial \dot{\vec{r}}_v}{\partial q_\alpha}$$ 2

وبالنسبة لمجموعة N من الجسيمات والتي كتلة الجسم رقم v فيها m_v يمكن وضع الصورة السابق كالآتي:

$$\sum_{v=1}^{N} \vec{F}_v \cdot \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_\alpha} = \frac{d}{dt}\left(\sum_{v=1}^{N} m_v \dot{\vec{r}}_v \cdot \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_\alpha}\right) - \sum_{v=1}^{N} m_v \dot{\vec{r}}_v \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_v}{\partial q_\alpha} \qquad (13)$$

2

$$Q_\alpha = \frac{d}{dt}\left(m_v \dot{\vec{r}}_v \cdot \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_\alpha}\right) - m_v \dot{\vec{r}}_v \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_v}{\partial q_\alpha} \qquad (14)$$

2

وحيث أن $\dot{\vec{r}}_v$ هو متجه سرعة الجسيم ومن ثم يمكن وضع الصورة السابقة لمعادلة (14) بدلالة طاقة الحركة T كالآتي

حيث أن:

$$T = \frac{1}{2} m_v \left(\dot{\vec{r}}_v \cdot \dot{\vec{r}}_v\right) \qquad (15)$$

2

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} = m_v \dot{\vec{r}}_v \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_v}{\partial \dot{q}_\alpha} = m_v \dot{\vec{r}}_v \cdot \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_\alpha} \qquad (16)$$

2

$$\frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = m_v \dot{\vec{r}}_v \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_v}{\partial q_\alpha} \qquad (17)$$

2

بالتعويض من المعادلة (16)، (17) في المعادلة (14) نحصل على :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = Q_\alpha \qquad (18)$$

2

السؤال الرابع (20 درجة):

قذف جسيم كتلته m يتحرك في مجال محافظ في المستوي xy وكانت له طاقتي الجهد والحركة كالتالي: $T = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$ ، $V = mgy,$

أوجد دالة لاجرانج وأوجد معادلتي لاجرانج للحركة في اتجاه محوري x و y .

دالة لاجرانج هي كالتالي:

$$L = T - V = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy$$

معادلتي الحركة:

(i) في اتجاه محور x أو في اتجاه الإحداثي المعمم x وهي:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{\partial L}{\partial x} \qquad (1)$$

3

(ii) في اتجاه محور y هي:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right)=\frac{\partial L}{\partial y} \qquad (2)$$

3

نوجد الآن التفاضلات الجزئية أو العادية كالتالي:

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)=m\dot{x} \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)=m\ddot{x}$$

3

$$\frac{\partial L}{\partial x}=0$$

2

وبالتعويض في (١) نجد أن:

$$m\ddot{x}=0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{x}=0 \qquad (3)$$

2

1 2

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}=m\dot{y} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right)=m\ddot{y}, \quad \frac{\partial L}{\partial y}=-mg$$

3

بالتعويض في (٢) نجد أن:

$$m\ddot{y}=-mg \Rightarrow \quad \ddot{y}=-g \qquad (4)$$

3

السؤال الخامس (20 درجة):

جسيم كتلته m يتحرك في مجال قوة دالة الجهد V والمطلوب أوجد دالة هاملتون ثم معالات هاملتون لحركة الجيسم في الاحداثيات الكروية (r,θ,ϕ) إذا علمت أن الطاقة الحركية في الاحداثيات الكروية تعطى بالعلاقة:

$$T=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\,\dot{\theta}^2+r^2\sin^2\theta\,\dot{\phi}^2)$$

ستكون دالة لاجرانج

$$L=T-V=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\,\dot{\theta}^2+r^2\sin^2\theta\,\dot{\phi}^2)\ -V(r,\theta,\phi)$$

2

من دالة لاجرانج نوجد السرعات المعممة بدلالة كميات الحركة المعممة كما يلي :

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \Rightarrow \dot{r} = \frac{p_r}{m}, \quad p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m r^2 \dot{\theta} \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{m r^2}$$ 1

$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = m r^2 \sin^2\theta\, \dot{\phi} \Rightarrow \dot{\phi} = \frac{p_\phi}{m r^2 \sin^2\theta}$$ 1

وبالتالي دالة هاملتون هي :

$$H = \sum_\alpha p_\alpha \dot{q}_\alpha - L$$ 2

$$H = p_r \dot{r} + p_\theta \dot{\theta} + p_\phi \dot{\phi} - \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2\theta \dot{\phi}^2) + V(r,\theta,\phi)$$ 1

ثم بالتعويض عن $\dot{r}, \dot{\theta}, \dot{\phi}$ بدلالة p_r, p_θ, p_ϕ نحصل على

$$H = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + \frac{p_\phi^2}{2mr^2\sin^2\theta} + V(r,\theta,\phi)$$ 2

يلاحظ أن الدالة H كان يمكن إيجادها مباشرة من تساويها بالطاقة الكلية حيث أن النظام هنا من الأنظمة المحافظة:

أي ان

$$H = T + V$$ 2

معادلات هاملتون:

$$\dot{q}_\alpha = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}, \quad \dot{p}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial q_\alpha} \Rightarrow \dot{r} = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} = \frac{p_r}{m} \Rightarrow p_r = m\dot{r}$$ 2

$$\dot{\phi} = \frac{\partial H}{\partial p_\phi} = \frac{p_\phi}{m r^2 \sin^2\theta} \Rightarrow p_\phi = m r^2 \sin^2\theta\, \dot{\phi}$$ 2

$$\dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{p_\theta^2}{m r^3} + \frac{p_\phi^2}{m r^2 \sin^2\theta} - \frac{\partial V}{\partial r}$$ 3

$$\dot{p}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = \frac{p_\phi^2 \cos\theta}{m r^2 \sin^2\theta} - \frac{\partial V}{\partial \theta}, \quad \dot{p}_\phi = -\frac{\partial H}{\partial \phi} = -\frac{\partial V}{\partial \theta}$$ 3

يلاحظ أن V لا تعتمد على الإحداثي المعمم ϕ ومن ثم كذلك الدالة H وفي هذه الحالة يكون $\dot{p}_\phi = 0$ ومنها $p_\phi = const.$ ويكون العزم الدوراني p_ϕ هو ثابت الحركة.

جامعة الفرات
كلية العلوم بالحسكة
قسم: الرياضيات

نتائج امتحان مقرر (ميكانيك تحليلي) لطلاب السنة الرابعة
الدورة الأولى - للعام الدراسي 2023 - 2024م.

التسلسل	الرقم الجامعي	الاسم الثلاثي	العلامة		النتيجة
			رقماً	كتابةً	
1	894	رشا عبدي	23	ثلاث وعشرون فقط .	راسب
2	1253	عبير إبراهيم	20	عشرون فقط .	راسب
3	1589	اسيل الحسن	41	واحد وأربعون فقط .	راسب
4	1875	أسامة البكر	60	ستون فقط .	ناجح
5	1925	امل القتو	0	صفر درجة فقط.	راسب
6	2042	احمد الكعود	38	ثمانِ وثلاثون فقط .	راسب
7	2050	هيوا العبد الله	25	خمس وعشرون فقط .	راسب
8	2270	خبات عمر	52	اثنان وخمسون فقط .	راسب

أعضاء لجنة الرصد
مسجل:

رئيس شعبة الامتحانات
أ. يسرى العلي

عميد كلية العلوم بالحسكة
د. عبد القادر قريبوي

جامعة الفرات
كلية العلوم بالحسكة
قسم الرياضيات

النهاية العظمى : 100 درجة

درجات الامتحان في مقرر (برمجة بلغة c) لطلاب السنة: الثانية

الدورة الامتحانية الأولى للعام الدراسي 2023 / 2024

التسلسل	الرقم الجامعي	الاسم الثلاثي	العلامات: الامتحان العملي	العلامات: الامتحان النظري	المجموع: رقماً	المجموع: كتابة	النتيجة
1	1584	نسرين ناسو	15	23	38	ثمان وثلاثون فقط	راسب
2	2089	سامي البعاج	25	58	83	ثلاث و ثمانون فقط	ناجح
3	2112	حسين حسين	19	39	58	ثمان وخمسون فقط	راسب
4	2116	عمر إبراهيم	22	42	64	أربع وستون فقط	ناجح
5	2123	ربيعة دللي	13	20	33	ثلاث وثلاثون فقط	راسب
6	2145	امنة محمود	25	22	47	سبع وأربعون فقط	راسب
7	2195	رهف الحمدو	14	17	31	إحدى وثلاثون فقط	راسب
8	2197	عفاف الناصر	12	37	49	تسع و أربعون فقط	راسب
9	2205	بثينة الصالح	16	27	43	ثلاث وأربعون فقط	راسب
10	2215	آية الأحمد	20	40	60	فقط ستون علامة	ناجح
11	2219	منار علي	22	29	51	إحدى وخمسون فقط	راسب
12	2220	غيداء سماعيل	14	17	31	إحدى وثلاثون فقط	راسب
13	2269	حمود الحميد	14	38	52	اثنتا وخمسون فقط	راسب

لجنة الرصد

رئيس شعبة الامتحانات
أ. يسرى العلي

عميد كلية العلوم بالحسكة
د. حسين قريوي